Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 14:

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Công thức khai triển nhị thức NEWTON

Cho 2 số dương a,b và số nguyên dương n thì ta có

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^nb^n$$

$$(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b+...+(-1)^nC_n^nb^n$$

Trong các công thức trên ta có

+ Số các số hạng là $n+1$.
+ Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n.
+ Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$.
+ Các hệ số cách đều 2 số hạn đầu và cuối thì bằng nhau.

Một số khai triển hay sử dụng

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k=C_n^0+C_n^1x^1+...+C_n^nx^n$$

$$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kx^k=C_n^0-C_n^1x^1+...+(-1)^nC_n^nx^n$$

Các hướng giải quyết bài toán dạng này

❖ Nếu bài toán cho khai triển $(x^a+x^b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(x^a)^{n-i}(x^b)^i=\sum_{i=0}^{n}C_n^ix^{a(n-i)+bi}$, khi đó hệ số của x^m là C_n^i sao cho $a(n-i)+bi=m$.

❖ Nếu bài toán đề cập đến $\max;\min$ của các số hạng C_n^i thì xét

➢ Tìm $\max T_k$ thì giả sử T_k là lớn nhất khi đó $\begin{cases}T_k\ge T_{k+1}\\ T_k\ge T_{k-1}\end{cases}\Rightarrow k$

➢ Tìm min T_k thì giả sử T_k là nhỏ nhất khi đó $\begin{cases}T_k\le T_{k+1}\\ T_k\le T_{k-1}\end{cases}\Rightarrow k$

❖ Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n}i(i-1)C_n^i$ thì dùng đạo hàm.

❖ Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n}(i+k)C_n^i$ thì nhân 2 vế với x^k rồi lấy đạo hàm.

❖ Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n}a^kC_n^i$ lấy $x=a$ thích hợp.

❖ Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i-1}C_n^i$ thì lấy tích phân xác định trên đoạn $[a,b]$ thích hợp.

CÁC BÀI TOÁN VỀ HỆ SỐ NHỊ THỨC

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho khai triển $Q(x)=(1+x)^9+(1+x)^{10}+...+(1+x)^{14}=a_0+a_1x+...+a_{14}x^{14}$. Tìm a_9.

Lời giải:

+ Hế số của x^9 trong khai triển $Q(x)=(1+x)^9+(1+x)^{10}+...+(1+x)^{14}$ là $C_9^9;C_{10}^9;C_{11}^9;C_{12}^9;C_{13}^9;C_{14}^9$.

Vậy $a_9=C_9^9+C_{10}^9+...+C_{14}^9=3003$.

Bài 2. Tìm hệ số của x^{16} trong khai triển $(x^2-2x)^{10}$.

Lời giải:

+ Ta có $(x^2-2x)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(x^2)^{10-k}(-2x)^k=\sum_{k=0}^{10}(-2)^kC_{10}^kx^{20-k}$

+ Chọn $20-k=16\Rightarrow k=4$.

Vậy hế số của x^{16} trong khai triển là: $C_{10}^4(-2)^4$

Bài 3. Tìm hệ số của x^{1008} trong khai triển của nhị thức $(x^2+\frac{1}{x^3})^{2009}$.

Lời giải:

+ Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là

$T_{k+1}=C_{2009}^k(x^2)^{2009-k}(\frac{1}{x^3})^k=C_{2009}^kx^{4018-5k}$.

+ Chọn $4018-5k=1008\Rightarrow k=602$.

Vậy hệ số của x^{1008} trong khai triển là C_{2009}^{1008}.

Bài 4. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $\left[1+x^2(1-x)\right]^8$.

Lời giải:

+ Ta có $[1+x^2(1-x)]^8=\sum_{k=0}^{8}C_8^k[x^2(1-x)]^k=\sum_{k=0}^{8}C_8^kx^{2k}\left[\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_k^ix^i\right]$

Vậy hệ số của x^8 trong khai triển là $(-1)^iC_8^kC_k^i$ thỏa mãn $\begin{cases}0\le i\le k\le 8\\2k+i=8\\i,k\in\mathbb{N}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}i=0\\k=4\end{cases}\vee\begin{cases}i=2\\k=3\end{cases}$

Vậy hệ số của x^8 là: $(-1)^0C_8^4C_4^0+(-1)^2C_8^3C_3^2=238$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 5. Xác định hệ số của x^3 trong khai triển thành đa thức của $P(x)=(1+2x+3x^2)^{10}$.

Lời giải:

+ Ta có $P(x)=(1+2x+3x^2)^{10}=\left[1+x(2+3x)\right]^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k x^k(2+3x)^k$

$=C_{10}^o+C_{10}^1 x(2+3x)+C_{10}^2x^2(2+3x)^2+C_{10}^3x^3(2+3x)^3+...+C_{10}^{10}x^{10}(2+3x)^{10}$

Suy ra hệ số của x^3 chỉ xuất hiện trong $C_{10}^2x^2(2+3x)^2+C_{10}^3x^3(2+3x)^3$

Vậy hệ số của x^3 trong khai triển của $P(x)$ là: $12C_{10}^2+8C_{10}^3=1500$.

Bài 6. Tìm hệ số x^{16} trong khai triển thành đa thức của $\left[1-x^2(1-x^2)\right]^{16}$

Lời giải:

+ Ta có $\left[1-x^2(1-x^2)\right]^{16}=\sum_{k=0}^{16}C_{16}^k(-x^2(1-x^2))^k=\sum_{k=0}^{16}(-1)^k x^{2k}C_{16}^k(1-x^2)^k$

$=\sum_{k=0}^{16}(-1)^k x^{2k}C_{16}^k\left[\sum_{i=0}^{k}C_k^i(-x^2)^i\right]=\sum_{k=0}^{16}\left((-1)^{k+i}C_{16}^kC_k^ix^{2(k+i)}\right)$

Vậy hệ số của x^{16} là $(-1)^{k+i}C_{16}^kC_k^i$ thỏa mãn

$$\begin{cases}0\le i\le k\le 16\\ 2(k+i)=16\\ i,k\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}i=0\\k=8\end{cases}\vee\begin{cases}i=1\\k=7\end{cases}\vee\begin{cases}i=2\\k=6\end{cases}\vee\begin{cases}i=3\\k=5\end{cases}\vee\begin{cases}i=4\\k=4\end{cases}$$

Vậy hệ số của x^{16} trong khai triển là

$C_{16}^8C_8^0+C_{16}^7C_7^1+C_{16}^6C_6^2+C_{16}^5C_5^3+C_{16}^4C_4^4=258570$

Bài 7. Cho biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2+1)^n$ bằng 1024. Hãy tìm hệ số $a(a\in\mathbb{N}^*)$ của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.

Lời giải:

+ Ta có $(x^2+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^{2k}=C_n^0+C_n^1x^2+C_n^2x^4+...+C_n^nx^{2n}$, thay $x=1$ vào ta được

$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=1024\Rightarrow n=10$

Vậy hệ số của số hạng ax^{12} là : $a=C_{10}^6=210$.

Bài 8. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức NEWTON của nhị thức $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$, biết rằng $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^3+....+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$(n nguyên dương, C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử).

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Theo giả thiết ta suy ra $C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^3+....+C_{2n+1}^n=2^{20}$

Mặt khác $C_{2n+1}^k=C_{2n+1}^{2n+1-k}(0\le k\le 2n+1)$. Từ đó

$2(C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^3+....+C_{2n+1}^n)=$

$C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+....+C_{2n+1}^n+C_{2n+1}^{n+1}+C_{2n+1}^{n+2}+C_{2n+1}^{n+3}+....+C_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n+1}$

$\Rightarrow 2^{20}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^3+....+C_{2n+1}^n=2^{2n}\Rightarrow n=10$

+ Số hạng thứ k+1 của khai triển là

$T_k=C_{10}^k(x^{-4})^{10-k}(x^7)^k=C_{10}^k x^{11k-40}$

Chọn $11k-40=26\Rightarrow k=6$

Vậy hệ số của x^{26} là $C_{10}^6=210$.

Bài 9. Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3}=26n$.

Lời giải:

+ Ta có $(x^2+1)^n(x+2)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{2k}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^i 2^{n-i}\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}C_n^k C_n^i 2^{n-i}x^{2k+i}$.

Chọn $2k+i=3n-3$, thỏa mãn $\begin{cases}0\le i,k\le n\\ 2k+i=3n-3\\ i,k\in\mathbb{N}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}i=n-1\\ k=n-1\end{cases}\vee\begin{cases}i=n-3\\ k=n\end{cases}$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} là $a_{3n-3}=2C_n^{n-1}C_n^{n-1}+2^3C_n^nC_n^{n-3}$

$=2n^2+\dfrac{4n(n-1)(n-2)}{3}=26n\Leftrightarrow n=5$

Vậy $n=5$ là giá trị cần tìm.

Bài 10. Xác định hệ số a_n của x^n trong khai triển thành đa thức của $\left(1+x+2x^2+...+nx^n\right)^2$, Tìm n biết rằng $a_n=6n$

Lời giải:

Ta có

$\left(1+x+2x^2+...+nx^n\right)^2=\left(1+x+2x^2+...+nx^n\right)\left(1+x+2x^2+...+nx^n\right)$, do đó hệ số a_n của x^n trong khai triển là

$a_n=1.n+1(n-1)+2(n-2)+...+n.1=2n+n(1+2+...+n)-(1^2+2^2+...+n^2)$

$=2n+n\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{n^3+11n}{6}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy $a_n = 6n \Leftrightarrow \frac{n^3+11n}{6} = 6n \Leftrightarrow n = 5$.

Vậy $n=5$ là giá trị cần tìm.

Bài 11. Cho khai triển $P(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2^2}\right)\left(x+\frac{1}{2^3}\right)...\left(x+\frac{1}{2^n}\right) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Xác định hệ số của $x^{n-1}; x^{n-2}$.

Lời giải:

Nhận thấy phương trình $P(x)=0$, có n nghiệm phân biệt $x_i (i=\overline{1,n})$ là $\frac{-1}{2}; \frac{-1}{2^2}; ...; \frac{-1}{2^n}$, do đó theo định lí Vi – ét ta có:

$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} x_ix_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$. Dễ thấy $a_n = 1$.

Vậy $a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$.

$$a_{n-2} = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} x_ix_j = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^{2n}}\right)\right]$$

Bài 12. Cho khai triển $(1-2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, tính tổng sau

$$S = |a_1| + 2|a_2| + 3|a_3| + ... + n|a_n|$$

Lời giải:

Xét khai triển

$(1+2x)^n = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n (*)$, Dễ thấy ta có

$|a_0| = b_0; |a_1| = b_1; |a_2| = b_2; ...; |a_n| = b_n$. Vậy tổng S bằng tổng sau

$S = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + ... + nb_n$, lấy đạo hàm theo x ở 2 vế của (*) ta được

$2n(1+2x)^{n-1} = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + ... + nb_nx^{n-1} (1)$, thay vào 2 vế của (1) $x=1$ ta được

$S = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + ... + nb_n = 2n.3^{n-1}$.

Bài 13. Cho khai triển nhị thức

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\left(x^{\frac{x-1}{2}}+2^{\frac{-x}{3}}\right)=C_n^0\left(x^{\frac{x-1}{2}}\right)^n+C_n^1\left(x^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}.\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)+...+C_n^{n-1}\left(x^{\frac{x-1}{2}}\right).\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1}+C_n^n\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^n$ (n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3=5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$. Tính n,x.

<u>Lời giải:</u>

+ Theo giả thiết $C_n^3=5C_n^1\Leftrightarrow\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=5n\Leftrightarrow n=7(n\in\mathbb{N}^*)$.

Số hạng thứ tư trong khai triển là

$T_3=C_7^3\left(x^{\frac{x-1}{2}}\right)^4.\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^3=35.2^{2x-2}.2^{-x}=20n=140\Leftrightarrow x=4$

Bài 14. Tìm x biết rằng trong khai triển của nhị thức: $\left(2^x+2^{\frac{1}{2}-x}\right)^n$ có tổng 2 số hạng thứ 3 và thứ 5 bằng 135, còn tổng 3 hệ số của 3 số hạng cuối bằng 22.

<u>Lời giải:</u>

+ Số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển là

$T_k=C_n^k\left(2^x\right)^{n-k}\left(2^{\frac{1}{2}-x}\right)^k$

Từ đó suy ra

Tổng 2 số hạng thứ 3 và thứ 5 bằng 135

$\Rightarrow T_2+T_4=C_n^2\left(2^x\right)^{n-2}\left(2^{\frac{1}{2}-x}\right)^2+C_n^4\left(2^x\right)^{n-4}\left(2^{\frac{1}{2}-x}\right)^4=135(1)$

Tổng 3 hệ số của 3 số hạng cuối bằng 22

$C_n^{n-2}+C_n^{n-1}+C_n^n=22(2)$

Từ $(2)\Rightarrow\dfrac{n(n-1)}{2}+n+1=22\Leftrightarrow n=6$, thay vào (1) ta được

$C_6^2\,2^{4x}.2^{1-2x}+C_6^4\,2^{2x}.2^{2-4x}=135\Leftrightarrow 2^{2x+1}+2^{2-2x}=9;t=2^{2x}$

$\Rightarrow 2t+\dfrac{4}{t}=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Vậy $x\in\left\{1;-\dfrac{1}{2}\right\}$ là giá trị cần tìm.

Bài 15. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển

$P(x)=(1+x)^4+(1+x)^5+(1+x)^6+...+(1+x)^{15}$

<u>Lời giải:</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $P(x)=(1+x)^4\left(1+(1+x)+(1+x)^2+...+(1+x)^{11}\right)$

$=(1+x)^4\dfrac{1-(1+x)^{12}}{1-(1+x)}=\dfrac{1}{x}(1+x)^{16}-\dfrac{1}{x}(1+x)^4$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển là $C_{16}^5=4368$.

Bài 16. Tìm hệ số của số hạng chứa x trong khai triển của tổng sau
$S(x)=(1+x)+2(1+x)^2+...+(n-1)(1+x)^{n-1}+n(1+x)^n$

Lời giải:

Ta có $S(x)=(1+x)F(x); F(x)=1+2(1+x)+3(1+x)^2+...+n(1+x)^{n-1}$

Để ý $F(x)$ là đạo hàm của tổng

$G(x)=1+x+(1+x)^2+(1+x)^3+...+(1+x)^n=(1+x)\dfrac{1-(1+x)^n}{1-(1+x)}=\dfrac{1}{x}(1+x)^{n+1}-\dfrac{1}{x}(1+x)$

Bài 17. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7\ (x>0)$

Lời giải:

+ Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là

$T_{k+1}=C_7^k(\sqrt[3]{x})^{7-k}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k=C_7^kx^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k}$

Chọn $\dfrac{7}{3}-\dfrac{7}{12}k=0\Leftrightarrow k=4$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là: $T_5=C_7^4=35$.

Bài 18. Trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{\frac{-28}{15}}\right)^n\ (x\neq 0)$. Hãy tìm số hạng không phụ thuộc vào x, biết rằng $C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79$.

Lời giải:

+Từ giả thiết ta có

$C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79\Leftrightarrow 1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}=79\Leftrightarrow n=12(n\in\mathbb{N}^*)$

Vậy số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển là

$T_{k+1}=C_{12}^k(x\sqrt[3]{x})^{12-k}\left(x^{\frac{-28}{15}}\right)^k=C_{12}^kx^{16-\frac{48}{15}k}$

Chọn $16-\dfrac{48}{15}k=0\Leftrightarrow k=5$. Vậy số hạng không phụ thuộc x là $T_6=C_{12}^5=792$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 19. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho trong khai triển $(1+x)^n$ có 2 hệ số liên tiếp có tỷ số là $\frac{7}{5}$.

Lời giải:

Ta có $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k \Rightarrow$ Hệ số của 2 số hạng liên tiếp là C_n^k và C_n^{k+1}.

Theo giả thiết ta có:

$\frac{C_n^k}{C_n^{k+1}}=\frac{7}{5}\Leftrightarrow\frac{k+1}{n-k}=\frac{7}{5}\Leftrightarrow n=3k+2+\frac{k+1}{7}(0\le k\le n)$. Do cả 2 số $n,k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\frac{k+1}{7}\in\mathbb{Z}\Rightarrow n_{\min}\Leftrightarrow\frac{k+1}{7}\Leftrightarrow k=6\Rightarrow n=21$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 21.

Bài 20. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$

BÀI TOÁN VỚI SỐ HẠNG LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho khai triển nhị thức

$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{10}x^{10}$. Hãy tìm số hạng a_k lớn nhất.

Lời giải:

+ Ta có $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\frac{2}{3}x\right)^k=\frac{2^k}{3^{10}}\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k x^k\Rightarrow a_k=\frac{2^k}{3^{10}}C_{10}^k$

Giả sử $a_k=\max(a_0;a_1;...a_{10})$, từ đó ta có

$$+\begin{cases}a_k\ge a_{k+1}\\ a_k\ge a_{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_{10}^k2^k\ge C_{10}^{k+1}2^{k+1}\\ C_{10}^k2^k\ge C_{10}^{k-1}2^{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{19}{3}\le k\le\frac{22}{3}\Rightarrow k=7$$

Vậy số hạng lớn nhất là $a_7=\frac{2^7}{3^{10}}C_{10}^7$.

Bài 2. Khai triển đa thức

$P(x)=(1+2x)^{12}=a_0+a_1x+...+a_{12}x^{12}$. Tìm $\max(a_0;a_1;...;a_{12})$.

Lời giải:

+ Ta có $(1+2x)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_n^k(2x)^k=\sum_{k=0}^{12}C_n^k2^kx^k\Rightarrow a_k=C_n^k2^k$.

Giả sử $a_k=\max(a_0;a_1;...;a_{12})$. Từ đó ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$+\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k C_{12}^k \ge 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \\ 2^k C_{12}^k \ge 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{23}{3} \le k \le \dfrac{25}{3} \Leftrightarrow k = 8$

Vậy số hạng lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 2^{18}$.

Bài 3. Giả sử $P(x) = (1+2x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ thỏa nãn hệ thức $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + ... + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$.

Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số $\{a_0; a_1; a_2; ...; a_n\}$.

Lời giải:

Ta có $(1+2x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, thay vào 2 vế với $x = \dfrac{1}{2}$ ta được

$2^n = a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + ... + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096 = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$.

Vậy $(1+2x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^k \Rightarrow a_k = C_{12}^k 2^k$

Giả sử a_k là hệ số lớn nhất, khi đó ta có

$\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k C_{12}^k \ge 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \\ 2^k C_{12}^k \ge 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow k = 8$

Vậy hệ số lớn nhất là $a_8 = 2^8 C_{12}^8 = 126720$

Bài 4. Xét khai triển $(x+2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$. Tìm n để $max\{a_0; a_1; a_2; ...; a_n\} = a_{10}$

Lời giải:

Ta có $(x+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} x^k \Rightarrow a_k = C_n^k 2^{n-k}$

$max\{a_0; a_1; a_2; ...; a_n\} = a_{10}$, khi và chỉ khi

$\begin{cases} a_{10} > a_{11} \\ a_{10} > a_9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_n^{10} 2^{n-10} > C_n^{11} 2^{n-11} \\ C_n^{10} 2^{n-10} > C_n^9 2^{n-9} \end{cases} \Leftrightarrow 29 < n < 32 \Rightarrow n \in \{30; 31\}$

Vậy $n \in \{30; 31\}$ là giá trị cần tìm.

Bài 5. Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \ge 4)$. Biết rằng, số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

Lời giải:

Sô tập con gồm 4 phần tử của A là tổ hợp chập 4 phần tử của n: C_n^4

Số tập con gồm 2 phần tử của A là tổ hợp chập 2 phần tử của n: C_n^2.

Theo đề bài ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$C_n^4 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = 20\frac{n(n-1)}{2}$

$\Leftrightarrow n^2 - 5n - 234 = 0 \Leftrightarrow n = 18$

Số tập con gồm k phần tử của A là $a_k = C_{18}^k$, giả sử a_k là lớn nhất khi đó

$\begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{18}^k \geq C_{18}^{k+1} \\ C_{18}^k \geq C_{18}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow k = 9$

Vậy $k = 9$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Gọi $a_1, a_2, ..., a_{11}$ là các hệ số trong khai triển sau

$(x+1)^{10}(x+2) = a_0 x + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{11} x^{11}$. Hãy tìm a_5.

Bài 2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$.

Bài 3. Tìm hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển của $(x^3 - 3x^2 + 2)^n$. Biết rằng $\frac{A_n^4}{A_{n+1}^3 - C_n^4} = \frac{24}{23}$.

Bài 4. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển

$$P(x) = (1+2x)^3 + (1+2x)^4 + (1+2x)^5 + ... + (1+2x)^{22}.$$

Bài 5. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $(x^2 - 2)^n$, biết rằng $A_n^3 + C_n^1 = 8C_n^2 + 49$.

Bài 6. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $(x^2 - x - 1)^n$ thành đa thức, biết:

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$$

Bài 7. Xác định hệ số của x^{11} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+2)^n(3x^3+1)^n$, biết:

$$C_{2n}^{2n} - 3C_{2n}^{2n-1} + ... + (-1)^k 3^k C_{2n}^{2n-k} + ... + 3^{2n} C_{2n}^0 = 1024.$$

Bài 8. Khai triển $P(x) = \left(x^3 + \frac{1}{2x^2}\right)^n = a_0 x^{3n} + a_1 x^{3n-5} + a_2 x^{3n-10} + ...$ Biết rằng 3 hệ số đầu $(a_0; a_1; a_2)$ lập thành cấp số cộng. Tính số hạng chứa x^4.

Bài 9. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Newton của $(2+x)^n$, biết :

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 2048.$$

Bài 10. Tìm hệ số của số hạng x^8 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$$

(n là số nguyên dương, $x > 0$).

Bài 11. Cho khai triển của đa thức

$P(x) = (x+1) + 2(x+1)^2 + 3(x+1)^3 + ... + 20(x+1)^{20} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{20} x^{20}$

Hãy tính hệ số a_{15}.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 12. Trong khai triển đa thức sau

$$(2x+1)^n(x+2)^n = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + ... + a_1x + a_0.$$

Tìm n, biết rằng $a_{2n-1} = 160$.

Bài 13. Tìm số nguyên dương n, biết

$$\frac{C_n^1}{2} - \frac{2C_n^2}{2^2} + \frac{3C_n^3}{2^3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{nC_n^n}{2^n} = \frac{1}{32}.$$

Bài 14. Cho $\left(\sqrt{2^{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sqrt{2^{x-1}}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^k$, biết n thỏa mãn $C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2$ và số hạng thứ tư trong khai triển trên bằng $2010n$. Xác định n và x.

Bài 15. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển sau $\left(1 - x^4 - \frac{1}{x}\right)^{12}$.

Bài 16. Đặt $\left(1 - x + x^2 - x^3\right)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{12}x^{12}$. Tính hệ số của a_7.

Bài 17. Khai triển và rút gọn biểu thức $1 - x + 2(1-x)^2 + 3(1-x)^3 + ... + n(1-x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Tính hệ số của a_8, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $\frac{1}{C_n^2} + \frac{7}{C_n^3} = \frac{1}{n}$.

Bài 18. Cho số nguyên dương $n > 4$ và $S = C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^2}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + ... + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} = \frac{4096}{13}$. Tìm n.

Bài 19. Giả sử n là số nguyên dương và $(1+x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$. Biết rằng tồn tại số nguyên $k(1 \le k \le n-1)$ sao cho $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$. Tìm n.

Bài 20. Biết rằng $(2+x)^{100} = a_0 + a_1x + ... + a_{100}x^{100}$. Chứng minh rằng $a_2 < a_3$. Với giá trị nào của k thì $a_k < a_{k+1}\ (0 \le k \le 99)$.

Bài 21. Cho biết tổng tất cả các hệ số của khai triển $\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ là 64. Tìm hạng tử không chứa x.

Bài 22. Chứng minh rằng với mọi x ta luôn có $x^n = \frac{1}{2012^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (2012x-1)^k$.

Bài 23. Sau khi khai triển $\left(1 + x^2 - x^3\right)^{1000}$ và $\left(1 - x^2 + x^3\right)^{1000}$ thì hệ số của x^{20} của đa thức nào lớn hơn.

Bài 24. Tìm giá trị của x biết hạng tử thứ sáu của khai triển $\left(e^{\ln\sqrt{9^{x-1}+7}} + 2^{-\frac{1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)}\right)^7$ là 84.

Bài 25. Chứng minh rằng trong khai triển $\left[(s-2)x^2 + nx - s\right](x+1)^n$ hệ số của x^8 là C_n^{s-2}.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 26. Cho khai triển $\left(1-x^2\right)^n = a_0 + a_1\left(1+x\right) + a_2\left(1+x\right)^2 + a_{2n}\left(1+x\right)^{2n}$. Tính hệ số a_3.

Bài 27. Cho khai triển $\left(1+x+x^2\right)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$. Tìm hệ số của x^4 biết rằng $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2n} = 2186$.

Bài 28. Cho khai triển $\left(1+2x\right)^{10}\left(x^2+x+1\right)^2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{14}x^{14}$. Hãy tính hệ số a_6.

Bài 29. Cho khai triển $\left(1+2x+3x^2\right)^{10} = a_0 + a_1 x + a_2 x + ... + a_{20}x^{20}$

1. Xác định hệ số a_4.
2. Tính tổng $a_0 + 2a_2 + 16a_4 + ... + 2^{20}a_{20}$

Bài 30. Cho $y = a_0 x + a_1 x^3 + a_2 x^5 + ... + a_n x^{2n+1} + ...$ thỏa mãn $\left(1-x^2\right)y' - xy = 1, \forall x \in \left(-1;1\right)$. Tính tổng $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$

Bài 31. Cho khai triển $P(x) = \left(1-x\right)^n + x\left(1+x\right)^{n-1} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$. Xác định hệ số a_3 biết rằng $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 512$

ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

Dựa vào các công thức cơ bản:

$$\begin{cases} C_n^k = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!} \\ A_n^k = \dfrac{n!}{\left(n-k\right)!} = k!C_n^k \\ P_n = n! \end{cases}$$

Ta cũng có $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ và $\dfrac{C_n^k}{k+1} = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho n,k nguyên dương , $k \le n$. Chứng minh rằng

$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{1}{C_n^k}$$

<u>Lời giải:</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Biến đổi vế trái của đẳng thức cần chứng minh

$$VT=\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{k!(n+1-k)!}{(n+1)!}+\frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}\right)=$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}\left(n+1-k+k+1\right)=$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}\left(n+2\right)=\frac{k!(n-k)!}{n!}=\frac{1}{\frac{n!}{k!(n-k)!}}=\frac{1}{C_n^k}\Rightarrow .\square$$

Bài 2. Cho n là số nguyên dương và chẵn chứng minh rằng

$$\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+...+\frac{1}{(n-1)!1!}=\frac{2^{n-1}}{n!}(*)$$

Lời giải:

Đẳng thức đã cho tương đương với

$$(*)\Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}+...+\frac{n!}{(n-1)!1!}=2^{n-1}$$

$\Leftrightarrow C_n^1+C_n^3+...+C_n^{n-1}=2^{n-1}$ (đúng). Ta có đpcm.

Bài 3. Chứng minh rằng với n là số nguyên dương $,n\ge 2$ ta có

$$\frac{1}{A_2^2}+\frac{1}{A_3^2}+...+\frac{1}{A_n^2}=\frac{n-1}{n}$$

Lời giải:

Biến đổi Vế trái của đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$VT=\frac{1}{A_2^2}+\frac{1}{A_3^2}+...+\frac{1}{A_n^2}=\frac{0!}{2!}+\frac{1!}{3!}+...+\frac{(n-2)!}{n!}$$

$$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(n-1)n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}=VP\Rightarrow (\text{đpcm}).$$

Bài 4. Tìm các số nguyên dương x,y thỏa mãn

$$\frac{C_{x+1}^y}{6}=\frac{C_x^{y+1}}{5}=\frac{C_x^{y-1}}{2}$$

Lời giải:

+ Điều kiện $y\le x-1(*)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có: $\frac{C_{x+1}^{y}}{6}=\frac{C_{x}^{y+1}}{5}\Leftrightarrow 5C_{x+1}^{y}=6C_{x}^{y+1}\Leftrightarrow \frac{5.(x+1)!}{y!(x+1-y)}=\frac{6.x!}{(y+1)!(x-y-1)!}$

$\Leftrightarrow 5(y+1)(x+1)=6(x-y)(x-y+1)(1)$

Tương tự ta cũng có: $2C_{x}^{y+1}=5C_{x}^{y-1}\Leftrightarrow 2(x-y)(x-y+1)=5y(y+1)(2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $15y(y+1)=5(y+1)(x+1)\Leftrightarrow x=3y-1(3)$, thay (3) vào (2) ta được:

$8y^2-4y=5y^2+5y\Leftrightarrow y=3\Rightarrow x=8$.

Vậy $\left(x;y\right)=\left(8;3\right)$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho $n\in\mathbb{N}^*,\forall 3\le m\in\mathbb{N}^*$ ta có

$$\frac{1}{C_{m+k}^{k+1}}=\frac{m-1}{m-2}\left(\frac{1}{C_{m+k-1}^{k+1}}-\frac{1}{C_{m+k}^{k+2}}\right)$$

Bài 2. Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng

$$C_n^1+2\frac{C_n^2}{C_n^1}+3\frac{C_n^3}{C_n^2}+...+n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}=\frac{n\left(n+1\right)}{2}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng với n nguyên dương, ta có

$$\frac{C_n^0}{C_{n+2}^1}+\frac{C_n^1}{C_{n+3}^2}+...+\frac{C_n^n}{C_{2n+2}^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

Bài 4. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{C_{2009}^1}+\frac{1}{C_{2009}^2}+...+\frac{1}{C_{2009}^{2009}}=\frac{1005}{2009}\left(\frac{1}{C_{2008}^1}+\frac{1}{C_{2008}^2}+...+\frac{1}{C_{2008}^{2008}}\right)$$

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n\ge 2$ ta luôn có

$$\frac{C_n^2}{\left(n-1\right)^2}+\frac{2C_n^3}{\left(n-1\right)^3}+\frac{3C_n^4}{\left(n-1\right)^4}+...+\frac{\left(n-1\right)C_n^n}{\left(n-1\right)^n}=1$$

Bài 6. Chứng minh rằng $2.1.C_{2000}^2+3.2.C_{2000}^3+...+2000.1999.C_{2000}^{1999}\vdots 3998000$

Bài 7. Chứng minh rằng với số nguyên chẵn n thì 2^n chia hết cho

$$C_{2n}^0+3C_{2n}^2+...+3^kC_{2n}^{2k}+...+3^nC_{2n}^{2n}$$

Bài 8. Giải phương trình $\frac{1}{C_4^x}-\frac{1}{C_5^x}=\frac{1}{C_6^x}$.

Bài 9. Tìm số nguyên dương x thỏa mãn

$$C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14.$$

Bài 10. Giải bất phương trình

$$\frac{1}{2}A_{2x}^2-A_x^2\le\frac{6}{x}C_x^3+10.$$

Bài 11. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 < \dfrac{5}{4}A_{n-2}^2 \\ C_{n+1}^{n-4} \geq \dfrac{7}{15}A_{n+1}^3 \end{cases}$$

Bài 12. Chứng minh với mọi $k, n \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $3 \leq k \leq n,$ ta đều có

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$$

Bài 13. Tìm số tự nhiên k thỏa mãn đẳng thức $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$

Bài 14. Giải phương trình

$$P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$$

Bài 15. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$$

Bài 16. Xác định số nguyên dương n thỏa mãn

$$8\left(C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + ... + C_n^3\right) = A_{n+1}^3$$

NHỊ THỨC NEWTON DÙNG TRONG ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

❖ Khi gặp tổng là tổng các tích giữa 2 công thức tổ hợp, thường nhân 2 khai triển với nhau sau đó so sánh hệ số của biến cùng bậc với nhau.

❖ Khi gặp tổng có riêng $C_n^0; C_n^4; C_n^8; ...$hoặc tổng có riêng $C_n^1; C_n^5; C_n^9; ...$ hoặc các tổng $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - ...$; $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - ...$ thì dùng số phức.

❖ Khi số hạng của tổng có dạng $\dfrac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1}C_n^k$ (hay cứ có mẫu thức hơn kém nhau k đơn vị) thì dùng tích phân.

<u>Các kết quả quen thuộc:</u>

$1/\, C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

$2/\, C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$

<u>Chứng minh:</u>

Đặt $A = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ...; B = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ...$

Ta cần chứng minh: $A + B = 2^n; A = B = 2^{n-1}$

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$, thay vào $x = 1 \Rightarrow 2^n = A + B(1)$

Ta có $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^n + ... + (-1)^n C_n^n x^n$, thay vào $x = 1 \Rightarrow 0 = A - B(2)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A = B = 2^{n-1} \Rightarrow \square$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $m, n, 0 \le p \le \min\{m; n\}$. Ta luôn có
$C_m^p + C_m^{p-1}C_n^1 + C_m^{p-2}C_n^2 + ... + C_m^{p-q}C_n^q + ... + C_m^0 C_n^p = C_{m+n}^p$

Lời giải:

Ta có:
$$\begin{cases} (1+x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + ... + C_m^p x^p + ... + C_m^m x^m \\ (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^p x^p + ... + C_n^n x^n \end{cases}$$
$$\Rightarrow (1+x)^{m+n} = M(x) + (C_m^p C_n^0 + C_m^{p-1}C_n^1 + C_m^{p-2}C_n^2 + ... + C_m^{p-q}C_n^q + ... + C_m^0 C_n^p)x^p \ (*)$$
Trong đó $M(x)$ là một đa thức không chứa x^p, so sánh hệ số của x^p 2 vế của (*) ta được
$$C_{m+n}^p = C_m^p C_n^0 + C_m^{p-1}C_n^1 + C_m^{p-2}C_n^2 + ... + C_m^{p-q}C_n^q + ... + C_m^0 C_n^p \Rightarrow \square$$
Đặc biệt với $m = n = p$**,** ta có
$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$$

Bài 2. Cho $\begin{cases} 0 \le k, n \\ k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Chứng minh rằng
$$C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_n^{k+1} + ... + C_n^{n-k} C_n^n = \frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}$$

Lời giải:

Viết lại đẳng thức cần chứng minh
$C_n^0 C_n^{n-k} + C_n^1 C_n^{n-k-1} + ... + C_n^{n-k} C_n^0 = \dfrac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}$, điều này gợi ý đến vế trái là hệ số của x^{n-k}.
Ta xét
$(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$, sau đó so sánh hệ số của x^{n-k} ở 2 vế ta có đpcm.
Áp dụng kết quả bài 1. Ta có ngay điều phải chứng minh.

Bài 3. Cho $\begin{cases} 0 \le k, n \\ k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Chứng minh rằng
$$C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + ... + C_{k+n}^n = C_{n+k+1}^n$$

Lời giải:

Viết lại đẳng thức cần chứng minh
$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + ... + C_{k+n}^k = C_{n+k+1}^{k+1}$, điều này gợi ý đến vế trái là tổng các hệ số chứa x^k.

Xét đa thức

$P(x)=(1+x)^k+(1+x)^{k+1}+(1+x)^{k+2}+...+(1+x)^{k+n}$

$=(1+x)^k\dfrac{1-(1+x)^{n+1}}{1-(1+x)}=\dfrac{(1+x)^{n+k+1}-(1+x)^k}{x}$, so sánh hệ số của số hạng chứa x^k ở 2 vế ta suy ra đpcm.

Bài 4. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$$S=\left(\frac{C_n^0}{1}\right)^2+\left(\frac{C_n^1}{2}\right)^2+\left(\frac{C_n^2}{3}\right)^2+...+\left(\frac{C_n^n}{n+1}\right)^2$$

Lời giải:

S có dạng $S=\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{C_n^k}{k+1}\right)^2$, biến đổi $\dfrac{C_n^k}{k+1}$

Ta có: $\dfrac{C_n^k}{k+1}=\dfrac{n!}{(k+1)k!(n-k)!}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1)(k+1)!(n-k)!}=\dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$

Vậy $S=\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}\right)^2=\dfrac{1}{(n+1)^2}\left((C_{n+1}^1)^2+(C_{n+1}^2)^2+(C_{n+1}^3)^2+...+(C_{n+1}^{n+1})^2\right)$

$=\dfrac{1}{(n+1)^2}\left(C_{2(n+1)}^{n+1}-1\right)$.

Bài 5. Tính tổng gồm 2n số hạng

$$S=\frac{1}{2}C_{2n}^1-\frac{1}{3}C_{2n}^2+...+(-1)^k\frac{1}{k}C_{2n}^{k-1}+...+(-1)^{2n+1}\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}.$$

Lời giải:

Với $k=2,3,...,2n+1$ ta có

$$\frac{1}{k}C_{2n}^{k-1}=\frac{1}{k}.\frac{(2n)!}{(k-1)!.(2n-k+1)!}=\frac{1}{2n+1}.\frac{(2n+1)!}{k!.(2n+1-k)!}=\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^k$$

Do đ ó:

$$S=\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}C_{2n}^{k-1}=\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{2n+1}C_{2n+1}^k=\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^kC_{2n+1}^k\right)$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^kC_{2n+1}^k-C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1\right)=\frac{1}{2n+1}\left((1-1)^{2n+1}-1+2n+1\right)=\frac{2n}{2n+1}.$$

Bài 6. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$$S=(C_n^1)^2+2(C_n^2)^2+...+n(C_n^n)^2$$

Lời giải:

Xét

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$f(x)=\left(1+x\right)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$

$\Rightarrow f'(x)=n\left(1+x\right)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+...+nC_n^nx^{n-1}$

$\Rightarrow xf'(x)=nx\left(1+x\right)^{n-1}=C_n^1x+2C_n^2x^2+3C_n^3x^3+...+nC_n^nx^n\,(1)$

$\left(1+x\right)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+...+C_n^n\,(2)$

Nhân theo vế của (1) với (2), sau đó so sánh hệ số của x^n ở 2 vế ta đươc

$S=\left(C_n^1\right)^2+2\left(C_n^2\right)^2+...+n\left(C_n^n\right)^2=nC_{2n-1}^{n-1}=nC_{2n-1}^n$.

Theo hai hướng của bài 6 và bài 4, ta có các bài toán sau(1,2,3,4,5):

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$$S=\left(C_n^0\right)^2-\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2-...+(-1)^n\left(C_n^n\right)^2$$

Bài 2. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$$S=\left(C_n^1\right)^2+4\left(C_n^2\right)^2+...+n^2\left(C_n^n\right)^2$$

Bài 3. Tính tổng sau: $S=\left(C_n^0\right)^2+2\left(C_n^1\right)^2+6\left(C_n^2\right)^2+...+\left(n^2+n\right)\left(C_n^n\right)^2$.

Bài 4. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$$S=\frac{\left(C_n^0\right)^2}{1}+\frac{\left(C_n^1\right)^2}{2}+\frac{\left(C_n^2\right)^2}{3}+...+\frac{\left(C_n^n\right)^2}{n+1}$$

Bài 5. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$$S=\frac{\left(C_n^0\right)^2}{1.2}+\frac{\left(C_n^1\right)^2}{2.3}+\frac{\left(C_n^2\right)^2}{3.4}+...+\frac{\left(C_n^n\right)^2}{(n+1)(n+2)}$$

Bài 6. Tính tổng gồm 2n số hạng

$$S=\frac{1}{2}C_{2n}^1-\frac{1}{3}C_{2n}^2+...+\left(-1\right)^k\frac{1}{k}C_{2n}^{k-1}+...+\left(-1\right)^{2n+1}\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}.$$

Bài 7. Chứng minh rằng: $1+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+...+\left(C_n^{n-1}\right)^2+1^2=C_{2n}^n$

CÁC BÀI TOÁN DÙNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Ta thường xét hai khai triển :

$$\begin{cases} f(x)=\left(1+x\right)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n \\ g(x)=\left(1-x\right)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-...+\left(-1\right)^nC_n^nx^n \end{cases}\quad(*)$$

(i). Nếu trong biểu thức tính tổng chỉ xuất hiện các số từ $n,n-1,n-2,...$ trở xuống thì ta đạo hàm trực tiếp hai vế của (*) một hoặc nhiều lần.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

(ii). Nếu ngược lại có xuất hiện từ các số từ $n+1, n+2, \ldots$ trở lên thì ta phải nhân thêm vào hai vế của (*) một lượng với $x, x^2, \ldots$ sau đó mới đạo hàm hai vế.
(iii). Sau các bước trên thì ta thay giá trị của x thích hợp vào hai vế, ta có kết quả.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho số nguyên dương n. Tính tổng sau
$1/ \ S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$
$2/ \ S = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + 4C_n^3 + \ldots + (n+1)C_n^n$

Lời giải:

1/ Xét $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$, đạo hàm 2 vế ta được
$\Rightarrow f'(x) = n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \ldots + nC_n^n x^{n-1} (*)$
Thay $x=1$ vào 2 vế của (*) ta được
$S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = 2^{n-1}$.
2/ Xét $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$, nhân vào 2 vế với $x \neq 0$
$\Rightarrow xf(x) = xC_n^0 + x^2 C_n^1 + x^3 C_n^3 + \ldots + x^{n+1} C_n^n$, đạo hàm 2 vế theo x ta được
$nx(1+x)^{n-1} + (1+x)^n = C_n^0 + 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + 4C_n^3 x^3 + \ldots + (n+1)C_n^n x^n (**)$
Thay $x=1$ vào 2 vế của (**) ta được
$S = 2^n + n.2^{n-1}$.

Bài 2. Tính tổng $S = 3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (n+3)C_n^n$

Lời giải:

Viết lại tổng S, ta được
$S = 3(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n) + \left(C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n\right) = 3S_1 + S_2$
$+S_1 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$
$+S_2 = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n.2^{n-1}$
Vậy $S = 3.2^n + n.2^{n-1} = 2^{n-1}(n+6)$.

Bài 3. Tìm số nguyên dương n sao cho
$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - 4.2^3 C_{2n+1}^4 + \ldots + (2n+1).2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$

Lời giải:

Trong tổng vế trái có xuất hiện kC_{2n+1}^k nên ta sẽ dùng đạo hàm
Xét $(1-x)^{2n+1} = C_{2n+1}^o - C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 - C_{2n+1}^3 x^3 + C_{2n+1}^4 x^4 - \ldots + C_{2n+1}^{2n} x^{2n} - C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$
Đạo hàm 2 vế theo x ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$-(2n+1)(1-x)^{2n}=-C_{2n+1}^1+2C_{2n+1}^2x-3C_{2n+1}^3x^2+4C_{2n+1}^4x^3-...+2nC_{2n+1}^{2n}x^{2n-1}-(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}$ (*)

thay vào $x=2$ vào 2 vế của (*), ta được

$-(2n+1)=-\left(C_{2n+1}^1-2.2C_{2n+1}^2+3.2^2C_{2n+1}^3-4.2^3C_{2n+1}^4+...+(2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}\right)=-2005$

$\Leftrightarrow n=1002$

Vậy $n\in\{1002\}$ là giá trị cần tìm.

Bài 4. Tính tổng, với $(1\le n\in\mathbb{N}^*)$

$1/\ S_1=\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n$

$2/\ S_2=\frac{1}{2}C_n^1-\frac{1}{3}C_n^2+...+(-1)^n\frac{1}{n+1}C_n^n$

$3/\ S_3=\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^3+\frac{1}{6}C_n^5+...$

Lời giải:

1/ Xét $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$, lấy tích phân 2 vế trên đoạn [0;1] ta được

$$\int_0^1(1+x)^n\,dx=\int_0^1\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n\right)dx$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^1=\left(\frac{1}{1}C_n^0x+\frac{1}{2}C_n^1x^2+\frac{1}{3}C_n^2x^3+...+\frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right)\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow\frac{2^{n+1}-1}{n+1}=C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=S_1+1\Rightarrow S_1=\frac{2^{n+1}-n-2}{n+1}\ (*)$$

2/ Xét $(1-x)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-...+(-1)^nC_n^nx^n$,lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;1]$ ta được

$$\int_0^1(1-x)^n\,dx=\int_0^1\left(C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-...+(-1)^nC_n^nx^n\right)dx$$

$$\Rightarrow\frac{1}{-(n+1)}(1-x)^{n+1}\Big|_0^1=\left(\frac{1}{1}C_n^0x-\frac{1}{2}C_n^1x^2+\frac{1}{3}C_n^2x^3-...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right)\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow S_2=\frac{n}{n+1}\ (**)$$

3/ Lấy (*)+(**) ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$2S_3 = S_1 + S_2 \Longrightarrow S_3 = \frac{2^n}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

Bài 5. Với số nguyên dương n. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1}C_n^1 - \frac{1}{2}C_n^2 + \frac{1}{3}C_n^3 - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}C_n^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

Lời giải:

Ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k = \frac{1-(1-x)^n}{x} = \frac{1-\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k x^k}{x} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{k-1}x^{k-1} (\forall x \neq 0)$$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;1]$, ta được

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} C_n^k(-1)^{k-1}x^{k-1}dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-(1-x)^{k+1}}{k+1}\Bigg|_0^1 = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \Bigg|_0^1 \Rightarrow dpcm$$

Bài 6. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$$

Lời giải:

Ta có $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}$, lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;1]$ ta được

$$\int_0^1 (1+x)^{2n} dx = \int_0^1 \left(C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}\right)dx$$

$$\Rightarrow \frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^1 = \left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2}C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 x^3 + ... + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}x^{2n+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Rightarrow S_1 = C_{2n}^0 + \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + ... + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n} = \frac{2^{2n+1}-1}{2n+1} (*)$$

Một cách tương tự xét $(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 - C_{2n}^3 x^3 + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}$, ta được

$$S_2 = C_{2n}^0 - \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 - \frac{1}{4}C_{2n}^3 + ... + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n} = \frac{1}{2n+1} (**)$$

Trừ theo vế của (*) cho (**), ta suy ra

$$2\left(\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}\right) = \frac{2^{2n+1}-2}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$$, ta có đpcm.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Cho n nguyên dương, tính tổng

$$C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$$

Lời giải:

Xét $(x+1)^n=C_n^0+xC_n^1+x^2C_n^2+...+x^nC_n^n$, lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;2]$ ta được

$$\int_0^2(x+1)^n dx=\int_0^2\left(C_n^0+xC_n^1+x^2C_n^2+...+x^nC_n^n\right)dx$$

$$\Rightarrow C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{2^n-1}{n+1}C_n^n=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$$

Bài 8. Cho n nguyên dương, tính tổng

$$S=\frac{C_n^0}{3}+\frac{C_n^1}{4}+\frac{C_n^2}{5}+...+\frac{C_n^n}{n+3}$$

Lời giải:

Dưới mẫu tăng 2 đơn vị, nên ta nhân thêm vào 2 vế của $(x+1)^2$ với x^2

Xét $(x+1)^n=C_n^0+xC_n^1+x^2C_n^2+...+x^nC_n^n$, nhân vào 2 vế với $x^2(x\neq 0)$ ta được

$$x^2(x+1)^n=x^2C_n^0+x^3C_n^1+x^5C_n^2+...+x^{n+2}C_n^n=(x+1)^{n+2}-2(x+1)^{n+1}+(x+1)^n$$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;1]$ ta được

$$\int_0^1\left(x^2C_n^0+x^3C_n^1+x^5C_n^2+...+x^{n+2}C_n^n\right)dx=\int_0^1\left((x+1)^{n+2}-2(x+1)^{n+1}+(x+1)^n\right)dx$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{3}x^3C_n^0+\frac{1}{4}x^4C_n^1+\frac{1}{5}x^6C_n^2+...+\frac{1}{n+3}x^{n+3}C_n^n\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{n+3}(x+1)^{n+3}-\frac{2}{n+2}(x+1)^{n+1}+\frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{3}C_n^0+\frac{1}{4}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2+...+\frac{1}{n+3}C_n^n=\frac{2^{n+1}(n^2+n+2)-2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Bài 9. Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{4}C_n^1+\frac{1}{6}C_n^2-\frac{1}{8}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n=\frac{1}{2(n+1)}$.

Lời giải:

Xét khai triển $(1-x^2)^n=C_n^0-C_n^1x^2+C_n^2x^4-...+(-1)^nC_n^nx^{2n}$

Suy ra, $x(1-x^2)^n=C_n^0x-C_n^1x^3+C_n^2x^5-...+(-1)^nC_n^nx^{2n+1}(*)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lấy tích phân hai vế của (*) trên đoạn $\left[0;1\right]$, ta được:

$$\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 x - C_n^1 x^3 + C_n^2 x^5 - ... + (-1)^n C_n^n x^{2n+1}\right)dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2\left(n+1\right)}C_n^n = \frac{1}{2\left(n+1\right)}.\square$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Với số nguyên dương n, tính tổng sau:

$$S = C_n^0 + 2C_n^1 + 6C_n^2 + ... + \left(n^2 - n + 2^n\right)C_n^n.$$

Bài 2. Cho n là số tự nhiên, $n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$n^2 C_n^0 + \left(n-1\right)^2 C_n^1 + \left(n-2\right)^2 C_n^2 + ... + 2^2 C_n^2 - 2 + 1^2 C_n^n - 1 = n\left(n+1\right)2^{n-2}$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN DÙNG SỐ PHỨC

(i). Đặc điểm nhận dạng để ta ứng dụng số phức vào là biểu thức cần tính hay chứng minh có các hạng tử chẵn(hoặc lẻ) có dấu đối xứng nhau:

chẳng hạn: $S = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - ...$

Thông thường làm bài toán loại này qua các bước:

(ii). Ta hay sử dụng khai triển: $\left(a+bi\right)^n = a^n C_n^0 + a^{n-1}bC_n^1 i - a^{n-2}b^2 C_n^2 - ... + b^n i^n C_n^n$, thay vào giá trị của a và b hợp lý.

(iii). Nếu cần dùng đến đạo hàm hay tích phân thì do biến phức không giống như biến thực do đó ta phải xét hàm của biến x sau đó đến kết quả cuối mới thay x bởi số phức i vào biểu thức cuối(Xem bài tập mẫu số 2).

(iv). Khi làm được các bước trên ta so sánh hệ số thực, hệ số ảo hai vế hoặc so sánh modun hai vế ta có kết quả bài toán.

Lưu ý: $i^2 = -1 \Rightarrow i^{4n} = 1$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$S = C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - ... + C_{4n}^{4n}$.

Lời giải:

Xét $\left(1+i\right)^{4n} = C_{4n}^0 + C_{4n}^1 i + C_{4n}^2 i^2 + C_{4n}^3 i^3 + C_{4n}^4 i^4 + ... + C_{4n}^{4n} i^{4n}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$=(C_{4n}^0-C_{4n}^2+C_{4n}^4-...+C_{4n}^{4n})+(C_{4n}^1-C_{4n}^3+C_{4n}^5-...-C_{4n}^{4n-1})i$

$=\left((1+i)^2\right)^{2n}=(2i)^{2n}=(-4)^n$

So sánh phần thực và phần ảo 2 vế ta được

$S=C_{4n}^0-C_{4n}^2+C_{4n}^4-...+C_{4n}^{4n}=(-4)^n$.

Ta cũng có: $C_{4n}^1-C_{4n}^3+C_{4n}^5-...-C_{4n}^{4n-1}=0$

Bài 2. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$S=1C_{8n}^1-3C_{8n}^3+...-(8n-1)C_{8n}^{8n-1}$

Lời giải:

Xét khai triển của: $f(x)=(1+x)^{8n}=C_{8n}^0+C_{8n}^1x+C_{8n}^2x^2+C_{8n}^3x^3+...+C_{8n}^{8n-1}x^{8n-1}+C_{8n}^{8n}x^{8n}$

Đạo hàm 2 vế theo x ta được:

$8n(1+x)^{8n-1}=C_{8n}^1+2C_{8n}^2x+3C_{8n}^3x^2+...+(8n-1)C_{8n}^{8n-1}x^{8n-2}+8nC_{8n}^{8n}x^{8n-1}$ (*)

Thay $x=i$ vào 2 vế của (*) ta được:

$8n(1+i)^{8n-1}=C_{8n}^1+2C_{8n}^2i+3C_{8n}^3i^2+...+(8n-1)C_{8n}^{8n-1}i^{8n-2}+8nC_{8n}^{8n}i^{8n-1}$

$=\left(1C_{8n}^1-3C_{8n}^3+...-(8n-1)C_{8n}^{8n-1}\right)+\left(2C_{8n}^2-4C_{8n}^4+...+8nC_{8n}^{8n}\right)i$

Mặt khác ta lại có

$8n(1+i)^{8n-1}=\dfrac{8n(1+i)^{8n}}{1+i}=4n.16^n(1-i)$. Vậy ta có

$4n.16^n(1-i)=\left(1C_{8n}^1-3C_{8n}^3+...-(8n-1)C_{8n}^{8n-1}\right)+\left(2C_{8n}^2-4C_{8n}^4+...+8nC_{8n}^{8n}\right)i(1)$

So sánh phần thực và phần ảo ở 2 vế của (1) ta được:

$S=1C_{8n}^1-3C_{8n}^3+...-(8n-1)C_{8n}^{8n-1}=4n.16^n$.

Ta cũng có: $2C_{8n}^2-4C_{8n}^4+...+8nC_{8n}^{8n}=-4n.16^n$.

Bài 3. Với số nguyên dương n. Chứng minh

$$\left(C_n^0-C_n^2+C_n^4-...\right)^2+\left(C_n^1-C_n^3+C_n^5-...\right)^2=2^n$$

Lời giải:

Xét số phức $z=(i+1)^n=C_n^0+iC_n^1+i^2C_n^2+...+i^nC_n^n$

$=\left(C_n^0-C_n^2+C_n^4-...\right)+\left(C_n^1-C_n^3+C_n^5-...\right)i$

Mặt khác ta lại có $z=(i+1)^n=\left(\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$

So sánh $|z|^2$ ở 2 vế, ta được

$|z|^2=\left(C_n^0-C_n^2+C_n^4-...\right)^2+\left(C_n^1-C_n^3+C_n^5-...\right)^2=\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\right)^2=2^n$, ta có đpcm

Bài 4. Với số nguyên dương n. Chứng minh

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$1+C_n^3+C_n^6+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

Lời giải:

Ta có $2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n(1)$.

Xét số phức $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\varepsilon^3=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3=1\Leftrightarrow(\varepsilon-1)(\varepsilon^2+\varepsilon+1)=0\Rightarrow\varepsilon^2+\varepsilon+1$Ta có:

$$(1+\varepsilon)^n=C_n^0+\varepsilon C_n^1+\varepsilon^2C_n^2+...+\varepsilon^nC_n^n=C_n^0+\varepsilon C_n^1+\varepsilon^2C_n^2+C_n^3+\varepsilon C_n^4+\varepsilon^2C_n^5+...(2)$$

$$(1+\varepsilon^2)^n=C_n^0+\varepsilon^2C_n^1+\varepsilon^4C_n^2+...+\varepsilon^{2n}C_n^n=C_n^0+\varepsilon^2C_n^1+\varepsilon C_n^2+C_n^3+\varepsilon^2C_n^4+...(3)$$

Cộng theo vế của (1),(2),(3) ta được

$$2^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\varepsilon^2)^n=3\left(C_n^0+C_n^3+C_n^6+...\right)+\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2\right)\left(C_n^1+C_n^2+C_n^4+C_n^5+...\right)$$

$$=3\left(C_n^0+C_n^3+C_n^6+...\right)$$

Mặt khác ta lại có

$1+\varepsilon=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3};1+\varepsilon^2=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$, từ đó ta có

$$3\left(C_n^0+C_n^3+C_n^6+...\right)=2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\Rightarrow C_n^0+C_n^3+C_n^6+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)\Rightarrow\square$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng

$$C_{2n}^0-3C_{2n}^2+9C_{2n}^4-27C_{2n}^6+...+(-3)^nC_{2n}^{2n}=2^{2n}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

Bài 2. Tính tổng

$$S=C_{2010}^1+3C_{2010}^3-3^2C_{2010}^5+3^3C_{2010}^7-...-3^{1004}C_{2010}^{2009}$$

Bài 3. Tính tổng $S=C_{2n}^1-\frac{C_{2n}^3}{3}+\frac{C_{2n}^5}{9}-...+\frac{(-1)^{n-1}C_{2n}^{2n-1}}{3^{n-1}}$.

Bài 4. Tính tổng sau: $C_{4n}^1-C_{4n}^3+C_{4n}^5-...-C_{4n}^{4n-1}$.

Bài 5. Tính tổng sau: $S=C_{8n}^2-2C_{8n}^4+...+4nC_{8n}^{8n}$.

Bài 6. Với n,k là các số nguyên dương và $a_k=(-1)^{k+1}3^kC_{6n}^{2k-1}$. Chứng minh

$$\sum_{k=1}^{3n}a_k=0$$

Bài 7. Tính tổng sau $C_{2011}^1-3C_{2011}^3+5C_{2011}^5-...-2001C_{2011}^{2011}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

BẤT ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho $2 \le n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng

$C_n^0 C_n^1 ... C_n^n \le \left(\frac{2^n - 1}{n-1}\right)^n$.

Lời giải:

Ta có $(x+1)^n = C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n$

$+ x = 1 \Rightarrow 2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n \Rightarrow C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n - 1$

Áp dụng BĐT Cauchy cho n số dương ta được

$2^n - 1 = C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n \ge n\sqrt[n]{C_n^1 C_n^2 ... C_n^n}$

$\Rightarrow C_n^0 C_n^1 ... C_n^n = C_n^1 ... C_n^n \le \left(\frac{2^n - 1}{n}\right)^n \le \left(\frac{2^n - 1}{n-1}\right)^n$.□

Bài 2. Chứng minh rằng với

$n > 2, n \in \mathbb{N}$ thì ta có

$\frac{1}{n}(C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n) < n!$

Lời giải:

Ta có $(x+1)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$, đạo hàm 2 vế theo x ta được

$C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + nC_n^n x^{n-1} = n(1+x)^{n-1}$

$+ x = 1 \Rightarrow C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n = n.2^{n-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\left(C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n\right) = 2^{n-1}$

Vậy chứng minh với $n > 2, n \in \mathbb{N}$ thì $2^{n-1} < n!$. Thật vậy

$n! = 1.2.3.4...n > \underbrace{2.2...2}_{(n-1)\,\text{số}} = 2^{n-1} \Rightarrow$.□

Bài 3. Cho $0 \le k \le n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng

$C_{2n-k}^n C_{2n+k}^n \le \left(C_{2n}^n\right)^2$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $a_k = C_{2n-k}^n C_{2n+k}^n$, ta chứng minh dãy $\{a_k\}$ là dãy giảm.

Thật vậy ta chứng minh $a_{k+1} \le a_k, \forall 0 \le k \le n \in \mathbb{Z}$.

$$a_{k+1} \le a_k \Leftrightarrow \frac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)!}\frac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!} \le \frac{(2n+k)!}{n!(n+k)!}\frac{(2n-k)!}{n!(n-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+k+1}{n+k+1} \le \frac{2n-k}{n-k} \Leftrightarrow 1+\frac{n}{n+k+1} \le 1+\frac{n}{n-k}$$ (đúng).

Vậy dãy $\{a_k\}$ là dãy giảm, suy ra $a_k \le a_0 = \left(C_{2n}^n\right)^2, \forall 0 \le k \le n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$.□

Bài 4. Cho số nguyên $k, 0 \le k \le 2000$. Chứng minh
$C_{2001}^k + C_{2001}^{k+1} \le C_{2001}^{1000} + C_{2001}^{1001}$

Lời giải:

Ta có $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$C_{2002}^{k+1} \le C_{2002}^{1001}, \forall 0 \le k \le 2000 (*)$$

Nhưng do $C_n^k = C_n^{n-k}, \forall 0 \le k \le n$. Nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (*) với $0 \le k \le 1000$.

Đặt $a_k = C_{2002}^{k+1}$, ta chỉ cần chứng minh dãy $\{a_k\}$ tăng, thật vậy

$$a_{k-1} \le a_k \Leftrightarrow C_{2002}^k \le C_{2002}^{k+1} \Leftrightarrow \frac{2002!}{k!(2002-k)!} \le \frac{2002!}{(k+1)!(2001-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2002-k} \le \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow 2k \le 2001$$ (đúng với mọi $0 \le k \le 1000$).

Vậy $a_k \le a_{1000} = C_{2002}^{1001} \Rightarrow$.□ (đpcm).

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số thực $x \ne 0$, và số nguyên lẻ n $(n \ge 3)$ ta có

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-...-\frac{x^n}{n!}\right)<1$$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Bài 3. Cho n là số nguyên dương có định và $k \in \{0,1,2,...,n\}$. Chứng minh rằng nếu C_n^k đạt giá trị lớn nhất tại k_0 thì $\frac{n-1}{2} \le k_0 \le \frac{n+1}{2}$.

Bài 4. Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{1+k^2}C_{2n}^{n+k} < 0$.

Bài 5. Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\left(C_n^0\right)^4+\left(C_n^1\right)^4+\left(C_n^2\right)^4+...+\left(C_n^n\right)^4\ge\frac{\left(C_{2n}^n\right)^2}{n+1}$$

Bài 6. Cho $n\in\mathbb{N}^*,\forall 3\le m\in\mathbb{N}^*$ ta có

$$\frac{1}{C_{m+k}^{k+1}}=\frac{m-1}{m-2}\left(\frac{1}{C_{m+k-1}^{k+1}}-\frac{1}{C_{m+k}^{k+2}}\right)$$

Từ đó chứng minh rằng

$$\frac{1}{C_m^1}+\frac{1}{C_{m+1}^2}+\frac{1}{C_{m+2}^3}+\frac{1}{C_{m+n}^{n+1}}<\frac{1}{m-2}$$

Bài 7. Với mọi số nguyên dương n, chứng minh rằng

$$\frac{1!.2!+2!.3!+...+n!.(n+1)!}{n\sqrt[n]{(1!)^2.(2!)^2....(n!)^2}}\ge 2\sqrt[2n]{n!}.$$

Bài 8. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên không âm k, ta có

$$\sum_{k=0}^{2011}(k-2011x)^2C_{2011}^kx^k(1-x)^{2011-k}\le\frac{2011}{4}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam